J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
32 (1990) 415-428

LINÉARISATION DE CERTAINES STRUCTURES DE POISSON

J. P. DUFOUR

Abstract

We say that a real, $(p+1)$-dimensional, Lie algebra is nonresonant if one of its adjoint operators admits p nonresonant eigenvalues. We show that every Poisson structure, which vanishes at a point with such a nonresonant Lie algebra as linearized structure, with only zero- or two-dimensional symplectic leaves, is linearizable. As a corollary we characterize nondegenerate three-dimensional Lie algebras.

1. Introduction et résultats principaux

Une *structure de Poisson* sur une variété V de classe C^∞ est la donnée, sur l'ensemble $C^\infty(V)$ des fonctions de classe C^∞ de V dans $\mathbf{R}$, d'un crochet $(f, g) \mapsto \{f, g\}: C^\infty(V) \times C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ qui en fasse une algébre de Lie et qui, de plus, vérifie la propriété "de Leibnitz"

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}.$$

Ces structures jouent un rôle fondamental en mécanique et physique [4, 5, 11]; elles sont systématiquement étudiées depuis une dizaine d'années.

Une application différentiable de classe C^∞ $h: (V, \{\ ,\ \}) \to (V', \{\ ,\ \}')$ entre deux variétés munies des structures de Poisson respectives $\{\ ,\ \}$ et $\{\ ,\ \}'$ sera dite *isomorphisme de structures de Poisson* (on dit aussi que h envoie la structure $\{\ ,\ \}$ sur $\{\ ,\ \}'$) si c'est un difféomorphisme tel que

$$\{f \circ h, g \circ h\} = \{f, g\}' \circ h$$

pour tous f et g dans $C^\infty(V')$.

Un problème important est de trouver les formes normales locales de telles structures à isomorphisme près, c'est-à-dire de trouver des systèmes de coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_n)$ dans lesquelles les $\{x_i, x_j\}$ aient des écritures aussi simples que possible. Si le rang de la matrice des

Received November 4, 1988 and, in revised form, January 20, 1989.

$\{x_i, x_j\}(x_0)$ est n alors, forcément, n est pair et la variété admet une structure symplectique dont le crochet de Poisson est précisément $\{\ ,\ \}$. Si ce rang est plus petit que n, théorème de décomposition de Weinstein nous dit que la variété est, localement, le produit d'une variété symplectique par une variété munie d'une structure de Poisson $\{\ ,\ \}$ nulle en x_0 (i.e., $\{f, g\}(x_0) = 0$ pour tous f et g). Ainsi on est ramené à l'étude des formes normales pour les structures de Poisson qui s'annulent en un point x_0. Pour une telle structure on peut définir son *k-jet* en x_0: si $x_1, \cdots, x_n$ sont des coordonnées locales nulles en x_0 c'est la structure de Poisson $\{\ ,\ \}^{(k)}$ telle que $\{x_i, x_j\}^{(k)}$ est le k-jet en x_0 de $\{x_0, x_j\}$. En particulier le 1-jet définit une structure de Poisson "linéaire"

$$\{x_i, x_j\}^{(1)} = \sum_r c_{ij}^r x_r.$$

L'égalité de Jacobi implique que les c_{ij}^r sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie (qui ne dépend que de $\{\ ,\ \}$) que l'on apelle l'*algèbre de Lie linéarisée de* $\{\ ,\ \}$ *en* x_0 [9]. Réciproquement toute algèbre de Lie détermine de manière évidente une structure de Poisson linéaire (sur son dual).

Comme dans les théories de singularités de fonctions, de formes différentielles ou de champs de vecteurs, on peut considérer la notion de *k-détermination*: une structure de Poisson sera dite *k-déterminée* au point x_0 si toute structure de Poisson ayant même k-jet en x_0, lui est localement isomorphe. Cette propriété de k-détermination ne dépend que du k-jet de la structure en x_0. La première notion à étudier est celle de 1-détermination. Suivant en cela Weinstein, on dira qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ est *non dégénérée* si toute structure de Poisson nulle en un point, dont la linéarisée en ce point est isomorphe à $\mathfrak{L}$, est 1-déterminante: cela revient à dire que toute structure de Poisson nulle en un point, dont la linéarisée est isomorphe à $\mathfrak{L}$, est *linéarisable*: i.e., isomorphe à son 1-jet.

Notons que la notion de 1-détermination est plus contraignante que la notion de linéarisabilité.

Dans ce domaine le résultat essentiel dont on dispose est que toute algèbre de Lie semi-simple compacte est non dégénérée [2]. On peut aussi introduire les notions de *k-détermination formelle* ou *analytique* pour lesquelles on requiert des isomorphismes formels ou analytiques. Alors on sait que toute algèbre de Lie semi-simple est formellement et analytiquement non dégénérée [9, 1]; par contre, comme c'est le cas pour $\mathrm{sl}(2, \mathbf{R})$, le fait d'être semi-simple n'entraîne pas toujours la non dégénérescence [4].

Ce travail a été motivé par un des problèmes que pose Weinstein dans [9]: est-ce que l'algèbre de Lie de dimension 3, de base e_1, e_2, e_3 telle que

$$[e_1, e_2] = 0, \qquad [e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_2$$

est non dégénérée? On verra (Théorème 2 ci-dessous) que la réponse est positive. C'est en rédigeant la démonstration de ce fait que nous avons vu qu'il n'était qu'un cas particulier du Théorème 1 énoncé plus bas.

Définitions. 1. Un opérateur linéaire $A: \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ est dit non résonnant si ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ne vérifient aucune relation

$$\text{(P)} \qquad \lambda_j = \sum_1 n_i \lambda_1, \qquad (n_1, \cdots, n_p) \in \mathbf{N}^p \text{ avec } n_1 + \cdots + n_p \geq 2.$$

2. Une algèbre de Lie réelle L de dimension $p+1$ sera dite non résonnante si l'adjoint de l'un de ses éléments f admet p valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ne vérifiant aucune des relations (P).

Si L est telle que dans la définition précédente les λ_j ont toutes des parties réelles non nulles. De plus on n'a aucune relation $\lambda_i + \lambda_j = 0$ ou $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_k$ Ceci entraîne l'existence d'une base $(e_1, \cdots, e_p, f)$ de L dans laquelle on a

$$[e_i f] = \sum_r a_i^r e_r, \qquad [e_i, e_j] = 0$$

pour tous i et j (on peut supposer que l'on travaille dans le cas complexe et choisir $e_1, \cdots, e_p$ qui mettent l'adjoint de f sous forme de Jordan; dans ce cas on montre successivement $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = 0, \cdots, [e_2, e_3] = 0, \cdots, [e_{p-1}, e_p] = 0$ en utilisant les identités de Jacobi concernant e_i, e_j, et f). Ainsi L *est produit semi direct de* $\mathbf{R}$ *par l'algèbre commutative* $\mathbf{R}^p$ associé à l'opérateur (non résonnant) de matrice (a_i^j).

Rappelons que toute structure de Poisson définit sur la variété un feuilletage (à singularités) dont les feuilles sont des variétés symplectiques [9]: l'espace tangent en un point à une telle feuille est formé par les valeurs en ce point des champs hamiltoniens

$$H_f = \sum_i \{x_i, f\} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad f \in C^\infty(V).$$

Par exemple pour la structure de Poisson linéaire correspondant à une algèbre de Lie non résonnante les feuilles symplectiques sont de dimension 0 ou 2. Ainsi si une structure de Poisson nulle en un point, admettant en ce point une linéarisée qui est non résonnante, est linéarisable elle doit avoir toutes ses feuilles symplectiques de dimension 0 ou 2. Notre résultat principal dans ce travail est le suivant.

Théorème 1. *Toute structure de Poisson nulle en un point, dont la linéarisée en ce point est une algèbre de Lie non résonnante, et dont les feuilles symplectiques sont de dimension* 0 *ou* 2, *est linéarisable en ce point.*

En posant

$$\begin{array}{lll} \{x_1, x_2\} = x_1 x_2, & \{x_2, x_3\} = 0, & \{x_3, x_1\} = 0, \\ \{x_1, x_4\} = x_1, & \{x_2, x_4\} = \lambda x_2, & \{x_3, x_4\} = -\mu x_3 \end{array}$$

et pour un bon choix de λ et μ on obtient un exemple de structure de Poisson sur $\mathbf{R}^4$, nulle en 0, dont la linéarisée est une algèbre de Lie non résonnante, et qui n'est pas linéarisable. En effet elle possède des feuilles de dimension 4 adhérentes à 0. En remplaçant $\{x_1, x_2\} = x_1 x_2$ par

$$\{x_1, x_2\} = x_1 x_2 \exp(-1/x_1^{2\mu} x_3^2)$$

on obtient (pour $\mu > 0$) un exemple d'une telle structure de Poisson qui est formellement linéarisable sans être linéarisable.

La démonstration de ce Théorème 1 fera l'objet du §2. Le principe en est élémentaire: choisissant de bonnes coordonnées $(x_1, \cdots, x_p, t)$ on se ramène au cas où le linéarisé du hamiltonien X de la fonction $(x_1, \cdots, x_p, t) \mapsto t$ est de la forme

$$X^1 = \sum_{ij} a_i^j x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec une matrice $A = (a_i^j)$ non résonnante. Alors on applique le théorème de linéarisation de Sternberg (à paramètre t) pour linéariser X. L'hypothèse de dimension sur les feuilles permetra alors d'achever la linéarisation.

Il est possible que ce théorème se généralise en partie pour les cas d'algèbres de Lie produit semi-direct de $\mathbf{R}$ par l'algèbre triviale $\mathbf{R}^p$ sans hypothèse de résonnance: mais alors on ne pourra espérer de linéarisation (comme le prouve la Proposition 1 du §3), on obtiendra des "formes normales" comportant des termes de degré supérieur à 1.

Ce Théorème 1 va nous permettre (Théorème 2) de caractériser les algèbres de Lie de dimension 3 qui sont non dégénérées. A isomorphisme près la liste des algèbres de Lie réelles, non triviales, de dimension 3 est la suivante (e_1, e_2, e_3 forment une base):

$$
\begin{array}{rlll}
\mathrm{so}(3): & [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_3] = e_1, & [e_3, e_1] = e_2, \\
\mathrm{sl}(2): & [e_1, e_2] = e_3, & [e_1, e_3] = e_1, & [e_2, e_3] = -e_2, \\
\mathrm{I}(\lambda): & [e_1, e_2] = 0, & [e_1, e_3] = e_1, & [e_2, e_3] = \lambda e_2, \\
\mathrm{II}(\mu): & [e_1, e_2] = 0, & [e_1, e_3] = \mu e_1 - e_2, & [e_2, e_3] = e_1 + \mu e_2, \\
\mathrm{III}: & [e_1, e_2] = 0, & [e_1, e_3] = e_1 + e_2, & [e_2, e_3] = e_2, \\
\mathrm{IV}: & [e_1, e_2] = 0, & [e_1, e_3] = e_2, & [e_2, e_3] = 0,
\end{array}
$$

où μ est un réel arbitraire et λ un réel compris entre -1 et 1 (voir par exemple [6]). Notre dernier paragraphe sera consacré à la démonstration du résultat qui suit.

Théorème 2. *Les algèbres de Lie réelles, de dimension* 3, *non dégénérées sont* so(3), III, II(μ) *pour tout* μ *non nul et* $I(\lambda)$ *pour*

$$\lambda \notin \{1/n, n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}\} \cup (\mathbf{Q} \cap [-1, 0]).$$

Les techniques utilisées là devraient permettre de déterminer également les algèbres de Lie " k-déterminantes" de dimension 3 pour $k = 2, 3, \ldots$. Il est à noter que si l'on ne s'intéresse qu'à la non dégénérescence "formelle" la liste du théorème n'est augmentée que du cas sl(2) ; pour la nondégénérescence "analytique" il nous faut aussi ajouter sl(2) mais on doit supprimer certains cas $I(\lambda)$ qui donnent des problèmes de "petit dénominateur" [7].

2. Démonstration du théorème 1

On se place dans les hypothèses du Théorème 1: comme on travaille localement on peut supposer que l'on travaille sur un voisinage ouvert V de l'origine dans $\mathbf{R}^{p+1}$ muni des coordonnées canoniques $(x_1, \cdots, x_p, t)$. On notera $x = (x_1, \cdots, x_p)$. De plus on peut imposer que la structure de Poisson soit telle que

$$X_i = \{x_i, t\} = \sum_{j=1}^{p} a_i^j x_j \text{ modulo } M^2(x, t),$$

$$u_{ij} = \{x_i, x_j\} \in M^2(x, t)$$

en désignant par $M^2(x, t)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur V dont le 1-jet en 0 est nul. De plus on peut imposer que la matrice A des a_i^j soit non résonnante au sens du §1.

Par la suite on notera $X = \sum_{i=1}^{p} X_i \partial/\partial x_i$, c'est le champ hamiltonien associé à la fonction $(x, t) \mapsto t$.

On sera amené à "développer" les fonctions $(x, t) \mapsto f(x, t)$, de classe C^∞, sous la forme

$$f = f^0 + f^1 + \cdots f^k + \cdots ,$$

où le terme "de degré k", f^k, est du type

$$f^k = \sum_{i=1+\cdots+i_p=k} a_{i_1 i_2 \cdots i_p}(t) x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} ;$$

les coefficients $a_{1_p \cdots i_p}(t)$ étant des fonctions de classe C^∞ en t, définies sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}$. En particulier on a $X_i = X_i^0 + X_i^1 + \cdots$ et on écrit $X^k = \sum_{i=1}^p X_j^k \partial / \partial x_i$.

Lemme 1. *Quitte à faire un changement de variables convenable préservant l'origine, on peut supposer* $X^0 \equiv 0$.

Démonstration. L'hypothèse de non résonnance implique en particulier que la matrice A est inversible. Alors l'équation implicite $X(x, t) = 0$ admet une solution locale C^∞

$$x = \theta(t).$$

On annule alors X_0 en faisant le changement de variables local $(x, t) \mapsto (x - \theta(t), t)$.

Par la suite nous supposerons donc la nullité de X^0. Ainsi on peut voir X comme *un champ sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}^p$ *"dépendant du temps* t*" et nul en* 0.

Lemme 2. *Sous les hypothèses du Théorème* 1 *on peut écrire, sur un voisinage de l'origine et pour tous* ij *dans* $\{1, \cdots, p\}$,

$$\{x_i, x_j\} = X_i Z_j - X_j Z_i ,$$

où $Z = \sum_{i=1}^p Z_i \partial / \partial x_i$ *est un champ de classe* C^∞ *défini à un terme de la forme* gX (g *fonction* C^∞) *près.*

Démonstration. Le fait que les feuilles symplectiques soient de dimension ≤ 2 se traduit par le fait que le rang de la structure de Poisson est partout inférieur à deux, c'est-à-dire par le fait que la matrice

$$\begin{bmatrix} \{x_1, x_2 & \{x_1, x_2\} & \cdots & \{x_1, x_p\} & X_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ \{x_p, x_1\} & \{x_p, x_2\} & \cdots & \{x_p, x_p\} & X_p \\ -X_1 & -X_2 & & -X_p & 0 \end{bmatrix}$$

est partout de rang ≤ 2. Cela se traduit par les relations

$$\text{(R)} \qquad X_i\{x_j, x_k\} + X_j\{x_k, x_i\} + X_k\{x_i, x_j\} = 0$$

pour tout triplet (i, j, k) de points de $\{1, \cdots, p\}$. Quitte à restreindre V on peut supposer que $(x, t) \mapsto (X_1, \cdots, X_p, t)$ est un difféomorphisme, donc on peut prendre $X_1, \cdots, X_p, t$ comme nouvelles variables. *Si* $p > 2$: il résulte de (R) que l'on a $\{x_i, x_j\} = X_i V_{ij} - X_j W_{ij} + X_i X_j A_{ij}$, où V_{ij} et W_{ij} sont respectivement indépendants de X_j et X_i. Faisant $X_i = 0$ dans (R) on obtient

$$W_{ij} = V_{ki}$$

pour tous j et k différents de i. On pose alors $W_{kr} = W_k$ et l'on a, pour tous i et j,

$$\{x_i, x_j\} = X_i W_i - X_j W_i + X_i X_j A_{ij}.$$

Revenant à (R) on obtient

$$A_{ij} + A_{jk} + A_{ki} = 0.$$

On écrit alors A_{i1} sous la forme $A_1 - A_i$ (A_1 arbitraire) pour avoir, pour tous i et j,

$$A_{ij} = A_j - A_i.$$

On obtient les Z_i cherchés prenant

$$Z_i = W_i + X_i A_i.$$

Pour $p = 2$, l'identité de Jacobi

$$\{\{x_1, x_2\}, t\} = \{\{x_1, t\}, x_2\} + \{x_1, \{x_2, t\}\}$$

nous donne

$$\left(X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\{x_1, x_2\} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)\{x_1, x_2\} + \frac{\partial X_2}{\partial t} X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial t} X_2.$$

On en tire la nullité de $\{x_1, x_2\}$ pour $(X_1, X_2) = 0$ et donc une formule

$$\{x_1, x_2\} = X_1 Z_2 - X_2 Z_1.$$

Pour achever la démonstration il suffit de voir que le seul arbitraire dans la construction ci-dessus des Z_i est le choix de A_1 et donc deux solutions Z à notre probléme différent d'un vecteur de la forme $((A_1 - A_1')X$.

Lemme 3. *Avec les notations du Lemme 2 les identités de Jacobi concernant les triplets x_i, x_j, t se traduisent par l'équation*

$$\text{(E)} \qquad \frac{dX}{dt} - [X, Z] = fX,$$

où X et Z sont considérés comme des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^p$ "dépendant du temps t" et f est une fonction de classe C^∞.

Démonstration. L'identité de Jacobi concernant le triplet (x_i, x_j, t) s'écrit
$$X\{x_i, x_j\} = \{X_i, x_j\} + \{x_i, X_j\}.$$
Le premier membre se réécrit
$$X(X_i)Z_j + X_iX(Z_j) - X(X_j)Z_i - X_jX(Z_i),$$
le deuxième membre se réécrit
$$\sum_r \frac{\partial X_i}{\partial x_r}(X_rZ_j - X_jZ_r) - \frac{\partial X_i}{dt}X_j - \sum_r \frac{\partial X_j}{\partial x_r}(X_rZ_i - X_iZ_r) + \frac{dX_j}{dt}X_i,$$
ou encore
$$Z_jX(X_i) - X_jZ(X_i) - Z_iX(X_j) + X_iZ(X_j) - \frac{dX_i}{dt}X_j + \frac{dX_j}{dt}X_i.$$
Cette identité de Jacobi se réécrit donc
$$X_i\left(\frac{dX_j}{dt} - X(Z_j) + Z(X_j)\right) = X_j\left(\frac{dX_i}{dt}X(Z_i) + Z(X_j)\right).$$
Faisant varier i et j on en déduit que les vecteurs $dX/dt - [X, Z]$ et X sont toujours colinéaires, d'où le résultat.

Comme on l'a fait ci-dessus pour X on "développe" Z sous la forme $Z^0 + Z^1 + \cdots$ où Z^k est la partie"de degré k" en x: en particulier $Z^0(t) = Z(0, t)$. Faisant $x = 0$ dans (E) on voit que $Z^0 = 0$. Alors Z peut être considéré comme un champ dépendant du temps sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^p$, nul à l'origine. Comme dans la classique "méthode du chemin" [7] on lui associe une famille $(\varphi_t)_{|t|<\varepsilon}$ de difféomorphismes locaux de $\mathbf{R}^p$ préservant l'origine:
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) = Z(\varphi_t(x), t), \qquad \varphi_0(x) = x.$$
Quitte à restreindre convenablement V, $(x, t) \mapsto (\varphi_t(x), t)$ est un difféomorphisme ψ. Alors ψ^{-1} nous donne un nouveau système de coordonnées locales sur V.

Lemme 4. *Dans ces nouvelles coordonnées on a $dX/dt = gX$, où g est une fonction de classe C^∞.*

Démonstration. Comme ψ préserve t, ψ_*^{-1} envoie X, le hamiltonien de t dans les anciennes coordonnées, sur le hamiltonien X' de t dans les nouvelles. De plus on a la formule classique [7]
$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^* X) = \varphi_t^*\left(\frac{d}{dt}X - [X, Z]\right).$$

On en déduit (utilisant le Lemme 3)

$$\frac{d}{dt}X' = \varphi_t^*(fX) = (f \circ \psi)X'$$

d'où le résultat.

Lemme 5. *Quitte à faire un nouveau changement de variables de la forme* $(x, t) \mapsto (x, a(t))$, *on peut supposer que* X^1 *est indépendant de* t.

Démonstration. On développe la fonction g que nous donne le Lemme 4 sous la forme $g = g^0 + g^1 + \cdots$ $(g^0(t) = g(0, t))$, et l'on a la relation

$$\frac{dX^1}{dt} = g^0 X^1.$$

Sous le changement de variables indiqué X est remplacé par bX, où $t \mapsto b(t)$ est une fonction de classe C^∞ non nulle. L'équation précédente donne alors

$$\frac{d}{dt}(bX)^1 = (b' + bg^0)X^1.$$

Donc pour un bon choix de b on peut obtenir $\frac{d}{dt}(bX)^1 = 0$ ce qui mène au résultat.

Lemma 6. *Par un changement de variables de la forme* $(x, t) \mapsto (a(x, t), t)$ *on se ramène au cas où* X *est linéaire et indépendant de* t.

Démonstration. Puisque X^1 est indépendant de t, X est un champ dépendant de t sur $\mathbf{R}^p$, nul en 0, et dont le linéarisé (pour tout t) est non résonnant. Il résulte alors du théorème classique de linéarisation C^∞ de Sternberg (voir [8] pour le théorème original et [7, Théorème 20] pour la version à paramètre utilisée ici) qu'il existe une famille $(a_t)_{|t|<\varepsilon}$ de difféomorphismes (locaux) de $\mathbf{R}^p$ avec

$$a_t^* X^1 = X_{(t)}$$

pour tout t. Ceci revient à dire qu'il existe un difféomorphisme local $(x, t) \mapsto (a(x, t), t)$ qui ramène X à X^1 (rappelons qu'un tel difféomorphisme échange les hamiltoniens de la fonction t).

C'est ce Lemme 6 qui constitue le coeur de notre démonstration: c'est pour pouvoir l'obtenir que nous devons imposer la condition de non résonnance.

Quitte à opérer un changement de variables linéaire $(x, t) \mapsto (a(x), t)$ on pourra de plus supposer que X est sous "forme de Jordan", i.e., la matrice A, définie au début de ce paragraphe, est sous forme de Jordan réelle.

Dans les nouvelles coordonnées on peut à nouveau appliquer les Lemmes 2 et 3 et (E) devient

$$[Z\,,X] = fX. \tag{F}$$

Lemme 7. *Pour un bon choix de* Z *on a* $[Z\,,X] = 0$.

Démonstration. On sait (preuve du Lemme 3) que Z^0 est nul; alors les termes d'ordre 1 dans les deux membres de (F) donnent

$$[Z^1\,, X] = f^0 X.$$

Si f^0 n'était pas nul cela impliquerait que A aurait une diagonale nulle; ce qui n'est pas. Ainsi f^0 est nul. Le Lemme 2 nous dit que Z est déterminé à un champ gX près; remplaçons donc Z par $Z' = Z + gX$. L'équation (F) donne

$$[Z'\,, X] = (f - X(g))X.$$

Or on prouve dans [7, Proposition 5 et Théorème 10] que l'équation $Xg = f$ a toujours des solutions sous les conditions imposées (non résonnance et nullité de f^0). On arrive ainsi au résultat.

Pour achever la démonstration du Théorème 1 on va à nouveau utiliser le changement de variables $\psi\colon (x\,,t) \mapsto (\varphi_t(x)\,,t)$ où $(\varphi_t)_t$ est associée au champ Z comme au Lemme 4. Seulement la condition supplémentaire $[Z\,,X] = 0$ que nous avons ici permet d'affirmer que X *n'est pas affecté par un tel changement.*

Pour voir que ψ^{-1} envoie la structure de Poisson $\{\ ,\ \}$ sur sa linéarisée $\{\ ,\ \}^L$ il reste à prouver que, pour tous i et j, on a

$$\{(\varphi_t)_i\,, (\varphi_t)_j\}^L = \{x_i\,, x_j\} \circ \psi$$

c'est-à-dire

$$\sum_r X_r \left(\frac{\partial}{\partial x_r}(\varphi_t)_i \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)_j - \frac{\partial}{\partial x_r}(\varphi_t)_j \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)_i\right) = \{x_i\,, x_j\} \circ \psi\,,$$

ou encore

$$X(\varphi_t)_i \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)_j - X(\varphi_t)_j \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)_i = \{x_i\,, x_j\} \circ \psi\,,$$

ou encore

$$X_i(\varphi_t)\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)_j - X_j(\varphi_t)\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t)_i = X_i(\varphi_t)Z_j(\varphi_t) - X_j(\varphi_t)Z_i(\varphi_t).$$

Il résulte de la définition même de φ_t que ces équations sont toujours vérifées achevant ainsi la démonstration du Théorème 1.

3. Démonstration du Théorème 2

On considère une structure de Poisson $\{\ ,\ \}$ sur un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^3$ (muni de coordonnées canoniques (x_1, x_2, t)) qui s'annule à l'origine.

Les cas où la linéarisée de la structure correspond aux algèbres de Lie $so(3)$ ou $sl(2)$ étant connus [2, 10], nous allons restreindre notre étude aux autres cas. Les cas III, II (μ) avec $\mu \neq 0$, et $I(\lambda)$ avec

$$\lambda \notin \{1/p, p \in \mathbf{N} - \{0, 1\}\} \cup (\mathbf{Q} \cap [-1, 0])$$

sont précisément les cas d'algèbres de Lie non résonnantes de dimension 3. Comme par ailleurs la condition de dimension des feuilles symplectiques est toujours vérifiée on peut appliquer le Théorème 1 pour affirmer que ces cas sont non dégénérés.

Pour achever il nous suffit de montrer que tous les autres cas sont dégénérés: ce sera un corollaire de la Proposition 1 que nous allons établir ci-dessous.

Définition. Soit A une matrice $p \times p$ dont les coefficients sont les réels a_i^j. On lui associe l'algèbre de Lie (produit semi-direct) $L(A)$ de base $e_1, \cdots, e_p, f$ définie par

$$[e_i, e_j] = 0, \qquad [e_i, f] = \sum_r a_i^r e_r$$

pour tous i et j.

Proposition 1. *Si A est une matrice résonnante il existe une structure de Poisson $\{\ ,\ \}$ sur $\mathbf{R}^{p+1}$, nulle en 0, ayant $L(A)$ comme linéarisée et qui ne soit pas linéarisable. De plus on peut même choisir $\{\ ,\ \}$ de façon que, dans les coordonnées canoniques $(x_1, \cdots, x_p, t)$ de $\mathbf{R}^{p+1}$ on ait*

$$\{x_i, x_j\} = 0$$

pour tous i et j dans $\{1, \cdots, p\}$.

Démonstration. Supposons d'abord que le rang de A ne soit pas maximum; dans ce cas la structure de Poisson linéarisée (correspondante à $L(A)$) admet un sous-espace de dimension strictement plus grande que 1 de points singuliers (où la structure s'annule). En rajoutant des termes de degré deux on peut obtenir une variété de points singuliers de dimension plus petite. Ceci interdit la linéarisabilité dans ces cas.

Supposons maintenant que le rang de A soit maximum. On note

$$X = \sum_{ij} a_i^j x_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

comme A est résonnante ce champ X n'est pas 1-déterminant [7]: il existe un champ $Y = \sum_i Y_i \partial/\partial x_i$ où les Y_i sont des polynômes, sans termes de degré 0 ou 1, dans les x_j, tels que $X+Y$ ne soit pas isomorphe à X (au voisinage de 0). En fait on a un peu mieux sous la forme du lemme qui suit.

Lemme 8. *Sous les conditions précédentes on peut choisir Y de telle façon que $X+Y$ ne soit localement isomorphe, au voisinage de 0, à aucun champ de la forme αX, où α est une fonctions de classe C^∞.*

Démonstration du Lemme 8. On note V^n l'espace des champs polynomiaux homogènes de degré n et $(X)^n$ le sous-espace de V^n formé des champs de la forme fX où f est un polynôme homogène de degré $n-1$; $L^n_X\colon V^n, (X)^n \to V^n, (X)^n$ désignera l'application $Y \mapsto [X, Y]$. La condition de résonnance équivaut à dire que L^n_X est non surjective pour au moins un entier n. Alors, ou bien il n'y a pas de relations

$$\sum_{i=1}^{p} n_i\lambda_i = 0, \quad n_i \in \mathbf{N}, \sum_{i=1}^{p} n_i = n-1,$$

entre les valeurs propres λ_i de A et $f \mapsto X(f)$ est surjective sur l'ensemble des polynômes homogènes de degré $n-1$ et l'on en déduit

$$L^n_X((X)^n) = (X^n),$$

ou bien l'on a P relations de ce type et

$$\dim (X)^n / L^n_X((X)^n) \leq P$$

mais comme à chacune de ces relations sont associées p relations

$$\lambda_j = n_1\lambda_1 + \cdots + n_{j-1}\lambda_{j-1} + (n_j+1)\lambda_j + n_{j+1}\lambda_{j+1} + \cdots$$

on a

$$\dim V^n / L^n_X(V^n) \geq pP.$$

Dans les deux cas on en déduit que L^n_X n'est pas surjectif même modulo $(X)^n$; le calcul élémentaire classique mène alors au résultat.

Fin de la démonstration de la proposition. On considère la structure de Poisson $\{\ ,\ \}$ sur $\mathbf{R}^{p+1}$ définie par

$$\{x_i, x_j\} = 0, \qquad \{x_i, t\} = X_i + Y_i$$

pour tous i et j $(X_i = \sum_j a_i^j x_j)$. Pour achever notre démonstration il suffit de voir que $\{\ ,\ \}$ n'est pas isomorphe à sa linéarisée $\{\ ,\ \}^L$ définie par

$$\{x_i, x_j\}^L = 0, \qquad \{x_i, t\}^L = X_i$$

pour tous i et j.

Raisonnant par l'absurde nous supposerons l'existence d'un difféomorphisme local $\psi: \mathbf{R}^{p+1}, 0 \to \mathbf{R}^{p+1}, 0$ envoyant $\{\ ,\ \}$ sur $\{\ ,\ \}^L$. Comme ces deux structures admettent $\{x = 0\}$ comme ensemble de points singuliers, ψ doit respecter cet ensemble. On en déduit

$$\frac{\partial \psi_{p+1}}{\partial t} \neq 0$$

sur un voisinage de l'origine, en notant ψ_{p+1} la dernière composante de ψ ; dans ces conditions on peut décomposer ψ localement en un produit

$$\psi = f \circ \varphi$$

de deux difféomorphisme de classe C^∞ f et φ tels que

$$f(x, t) = (x, a(x, t)), \qquad \varphi(x, t) = (\varphi_t(x), t)$$

pour tous $(x, t) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ assez voisins de l'origine. On note $\{\ ,\ \}'$ la structure de Poisson transformée de $\{\ ,\ \}$ par φ ; c'est aussi la structure transformée de $\{\ ,\ \}^L$ par f^{-1}. On écrit

$$\{x_i, t\}' = X_i', \qquad X' = \sum_i X_i' \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'on a, d'une part

$$(\varphi_t)_*(X + Y) = X$$

pour tout t, d'autre part

$$\{x_i, t\}' \circ f^{-1} = \{x, b(x, t)\}.$$

Ces dernières èquations se réécrivent

$$X_i' = \frac{\partial b}{\partial t}(f(x, t))X_i$$

et l'on a donc une équation de la forme

$$(\varphi_t)_*(X + Y) = \alpha_t X$$

pour tout t $((t, x) \mapsto \alpha_t(x)$ étant de classe $C^\infty)$, qui est impossible par construction de Y. On achève ainsi la démonstration.

Références

[1] J. F. Conn, *Normal forms for analytic Poisson structures*, Ann. of Math. **119** (2) (1984) 576–601.

[2] ——, *Normal forms for smooth Poisson structures*, Ann. of Math. **121** (2) (1985) 565–593.

[3] V. Guillemin & S. Sternberg, *Remarks on a paper of Hermann*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968) 110–116.
[4] ——, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge Univ. Press, 1984.
[5] P. Libermann & C. M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1987.
[6] P. J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz & H. Zassenhauss, *Invariants of real low dimension Lie algebras*, J. Mat. Phys. **17** (1976) 986–994.
[7] R. Roussarie, *Modèles locaux de champs et de formes*, Asterisque, **30** (1975).
[8] S. Sternberg, *On the structure of local homeomorphisms of Euclidian space*. II, Amer. J. Math. **80** (1958) 623-631.
[9] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geometry **18** (1983) 523–557.
[10] ——, *Poisson geometry of the principal series and non-linearizable structures*, J. Differential Geometry **25** (1987) 55–73.
[11] ——, *The geometry of Poisson brackets*, cours polycopié de l'Université de Tokyo, (1987).

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL